第 34 卷第 2 期
2004 年 3 月

东南大学学报（自然科学版）
JOURNAL OF SOUTHEAST UNIVERSITY (Natural Science Edition)

Vol. 34 No. 2
Mar. 2004

公共交通系统最佳路径算法

王 莉 李文权

（东南大学交通学院，南京 210096）

摘要：在分析城市道路网络最短路径算法(SP 算法)和公交网络的特点的基础上，提出公共交通系统最佳路径算法. 首先引入直达矩阵(***T*** 矩阵)和最小换乘矩阵(***Q*** 矩阵)，讨论公交网络节点间换乘问题，得出最少换乘算法. 利用 ***Q*** 矩阵确定节点间最少换乘次数，评价公交网络方便可达性. 其次结合最少换乘算法，对最短路径算法(Dijkstra 算法)进行改进. 在标号过程中，利用 ***Q*** 矩阵对待检验 *T* 标号点进行筛选，减少 *T* 标号计算量，得到一条综合考虑路径长度和换乘的最佳路径. 最后用一个简单的算例进行验算，说明该算法适用于一般公交网络，特别是换乘代价较高的公交网络.

关键词：公交网络；最短路径；最佳路径；矩阵；最少换乘

中图分类号：U 491　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001－0505(2004)02-0264-04

Best-routing algorithm for public transportation systems

Wang Li　　Li Wenquan

(College of Transportation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: This paper presents a best-routing algorithm for public transportation systems on the basis of analyzing the shortest path algorithm in urban traffic network and the character of transit network. ***T*** matrix and ***Q*** matrix are introduced to discuss the path-planning problem and the least transfer algorithm is obtained. By using ***Q*** matrix the least transfer between two nodes can be determined and the performance of the transit network is evaluated. By integrating the algorithm into shortest path algorithm, a best path in consideration of path length and transfer can be found. Finally, a simple numerical example is given which shows that this algorithm is applied to general transit network especially to a high transfer-cost network.

Key words: transit network; shortest path; best path; matrix; least transfer

公共交通系统是城市交通系统的重要组成部分. 由于公共交通对交通资源的高效利用，使得通过大力发展公共交通，实行公交优先成为缓解日趋严重的道路交通紧张状况的必然选择. 在路径选择时，公交出行者总希望选择最快捷的线路(即综合考虑时间、费用的交通阻抗值最小的线路)出行，可称之为最短路因素. 但由于交通阻抗值大小很难直观判定，使路径选择带有不确定性，称之为随机因素. 两者主次地位取决于供选择路径间交通阻抗差值大小. 公交线路交通阻抗值是指乘客在公交线路上出行的出行时间、费用、方便性(如换乘)等综合费用指标，是乘客选择公交线路的依据[1]. 人们在讨论城市道路交通线路问题时，着重考虑任意 2 个节点间最短路径. 只要 2 个节点有道路连接，就可进行搜索，而不考虑该路径换乘问题，这就可能造成搜索到的路径需多次换乘. 因换乘带来的换乘时间和车票费用会增加交通阻抗. 因此对司机来讲的最短路径，对乘客却并不是最佳选择. 在一个公交网络中寻找 2 个节点间最佳路径，要综合考虑出行时间、费用和换乘等相关因素，使交通阻抗最小.

目前应用较广泛的最短路径(shortest path, SP)算法有 Dijkstra 算法[2]（又称标号法）、PSP (partitioning shortest path) 算法和 DBFS (dynamic breadth-frist search)算法[3]等. 在换乘代价较高的公交网络，用 SP 算法得到的路径往往不是最佳路径. 本文引入特殊矩阵，讨论公交网络中 2 个节点间最少换乘算法，并将其应用于 SP 算法，以寻找一条最佳路径.

收稿日期：2003-06-24.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(50078015).
作者简介：王 莉(1979—)，女，硕士生；李文权(联系人)，男，副教授，硕士生导师，wenqli@ seu. edu. cn.

1　公交系统的网络描述

一个公交网络系统有一组不同的公交线路组成,且每条线路上分布有若干个上下乘客的站点,一条公交线路有一定车辆数.

公交网络用 $G = (N,A)$ 表示,N 为节点集合,A 为公交路段集合. 节点代表交叉口和包括换乘车站在内的所有公交站点;路段代表公交车行驶路段、步行路段、等车路段及换乘路段.

为便于分析,定义一些表现网络特性的符号和函数式[4,5]:S 为站点集合;$\mathbf{R}$ 为公交线路集合;$K(r,s)$ 为线路 r 上的站点 s,若 r 不经过 s,$K = 0$,线路起点 $K = 1$,$K(r,s_1) > K(r,s_2) > 0$ 表示 r 经过 s_2, s_1,方向为 $s_2 \to s_1$;$R(s)$ 为经过站点 s 的线路集合,$R(s) = \{r \mid K(r,s) > 0, r \in R\}$;$C(r_1,r_2)$ 为线路 r_1, r_2 相交站点集合,$C(r_1,r_2) = \{s \mid K(r_1,s) > 0$ 且 $K(r_2,s) > 0, s \in S\}$;$D(s,t)$ 为从站点 s 到站点 t 的直达线路集合,$D(s,t) = \{r \mid K(r,t) > K(r,s) > 0, r \in R\}$.

2　最少换乘算法

2.1　直达矩阵($\boldsymbol{T}$ 矩阵)

引入 $\boldsymbol{T}$ 矩阵. $T_{i,j}$ 为节点 $i \to j$ 直达线路数 n,即

$$T_{i,j} = \begin{cases} n & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

图 1 为一公交网络. 其中 1 ~ 15 为节点,R_1 ~ R_5 为线路,用实线段表示.

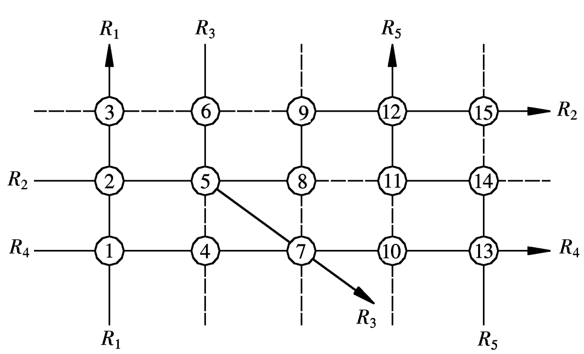

图 1　公交网络图

由定义得节点 1 ~ 9 的 $\boldsymbol{T}$ 矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&2\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

可以证明 $\boldsymbol{T}^n$ 表示通过 $(n-1)$ 次换乘从节点 $i \to j$ 的路径数[4]. 如 $T^2_{1,5} = 1$ 表示从节点 1 到 5 有一条一次换乘路线,换乘点为节点 2.

$T_{k,j}$ 为节点 $k \to j$ 的直达路线数,则有

$$T^n_{i,j} = \sum_k T^{n-1}_{i,k} T_{k,j}$$

2.2　最少换乘矩阵($\boldsymbol{Q}$ 矩阵)

引入 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵,$Q_{i,j}$ 为使得 $T^n_{i,j} \neq 0$ 的 n 的最小值,$n \in [1,\infty)$. $Q_{i,j} - 1$ 表示从节点 $i \to j$ 必要的最少换乘次数. 图 1 公交网络的 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \infty&1&1&1&2&\infty&1&2&2&1&2&2&1&2&2\\ \infty&\infty&1&\infty&1&\infty&2&1&1&3&4&1&3&4&1\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&\infty&1&2&2&1&2&3\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&1&1&2&3&1&2&3&1\\ \infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&1&2&2&2&3&2&2&3&2\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&2&2&1&2&3\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&\infty&1&\infty&\infty&1\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&\infty&1\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&2&2&1&2&3\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&\infty&\infty&2\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&1&\infty&1&2\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&1&1&\infty&\infty&2\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty&\infty \end{bmatrix}$$

式中,∞ 表示 2 个节点间不存在有效路径. $Q_{4,15} = 3$ 表示从节点 4 到 15 至少需换乘 2 次.

利用 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵可以确定最少换乘次数,还可用于评价公交网络. 若计算所得 Q_{ij} 很大,说明从节点 $i \to j$ 需多次换乘,方便性较差,可通过增加或改善 i,j 间公交线路来减小 Q_{ij}.

对于一条公交线路上的节点,应用 $\boldsymbol{T}$ 矩阵所得结果可能偏大,但这并不影响 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵的有效性. 当 $T^k_{i,j}$ 为偏大值时,必存在 $p < k$,使得 $T^p_{i,j} \neq 0$. 如 $T^2_{1,3} = 1$ 表示从节点 1 到 3 有一条一次换乘路径,换乘点为 2,此值偏大($1 \to 3$ 可直达). 而 $T_{1,3} = 1$,故 $Q_{1,3} = 1$.

2.3　算法思路

设 o,d 表示起讫点. ① 若 $o = d$,则为无效路

径;② 若 $Q_{od}=1$,选取 $D(o,d)$ 中一条路线,得直达路径;③ 若 $Q_{od}=2$,则必存在一个站点 m,使得 $Q_{om}=1$,$Q_{md}=1$. 分别选取 $D(o,m)$ 和 $D(m,d)$ 中一条路线相连,得一次换乘路径,换乘点为 m;④ 若 $Q_{od}=3$,必存在 2 个不同站点 m_1,m_2,使得 $Q_{om_1}=1$,$Q_{m_1m_2}=1$,$Q_{m_2d}=1$. 分别选取 $D(o,m_1)$、$D(m_1,m_2)$ 和 $D(m_2,d)$ 中一条路线相连,得二次换乘路径,换乘点为 m_1,m_2.

3 改进 *SP* 算法

本文对Dijkstra算法进行改进. Dijkstra算法又称标号法,是一个反复标号的过程. 从起点 o 开始,每一轮标号修正各临时标号(T 标号),确定一个标号(P 标号),直至终点 d 标上 P 标号,最后反向追踪得一条从 $o\to d$ 的最短路径. 节点间有道路连接就可以进行搜索,而没有考虑换乘. 因此,对于换乘代价比较高的公交网络,算法就不实用了. 结合最少换乘算法,在标号过程中应用 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵,可以简化计算,减少工作量,得到更为有效的路径. 改进 Dijkstra 算法步骤如下:

① 初始化　起点 o 标为 P 标号,$P_o=0$,其余各点标为 T 标号,$T_i=\infty$.

② 确定吸引线路集 W 和待修正的 T 标号点集 V　设刚得到的 P 标号点为 i,考虑所有与 i 相邻的 T 标号点 j,若 $0<K(r,i)<K(r,j)$ 且 $Q_{jd}\leqslant Q_0$,则 $r\in W$, $j\in V$. 其中,Q_0 为所容许的最大换乘次数.

③ 计算 T 标号　对 V 中 j,$T_j\leftarrow\min[T_j,\ P_i+d_{ij}]$,其中,$d_{ij}$ 为公交路段(i,j) 的权.

④ 确定 P 标号　综合考虑 T 标号和 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵,确定 P 标号.

⑤ 终止判别　转至 ②,反复标号,直至终点 d 标上 P 标号,算法终止.

4 算　例

以图 1 所示公交网络为例,寻找从节点 1 ~ 15 的一条最佳路径.

乘客选择公交线路的主要依据是线路交通阻抗. 公交线路交通阻抗值是指乘客在公交线路上出行的出行时间、费用、方便性(如换乘) 等综合费用指标. 采用如下函数式计算:

$$t_{\mathrm{R}}=t_0+t_{\mathrm{p}} \tag{1}$$

式中,t_{R} 为线路 R 交通阻抗值;t_0 为公交出行时间;t_{p} 为公交票价的时间价值.

根据乘客公交出行全过程的分析计算,公交出行时间为

$$t_0=t_{\mathrm{a}}+t_{\mathrm{b}}+t_{\mathrm{d}}+t_{\mathrm{h}} \tag{2}$$

式中,t_{a} 为公交车行驶时间;t_{b} 为步行到站及步行离站的时间总和;t_{d} 为平均等车时间,如果乘客到达均匀分布,则平均等车时间为发车间隔 t_{f} 的一半,即 $t_{\mathrm{d}}=t_{\mathrm{f}}/2$;$t_{\mathrm{h}}$ 为换乘时间,往往用适当扩大换乘时间来反映因换乘造成的不便.

t_{p} 可采用居民人均国民收入值进行转换,即

$$t_{\mathrm{p}}=\frac{n\times\text{票价}\times480\times\text{法定年工作天数}}{\text{居民人均年收入}}=\frac{n\times1\times480\times260}{8\,000}=15\,n(\mathrm{min}) \tag{3}$$

式中,n 为换乘次数;居民人均年收入为 8 000 元,法定工作 5 d/ 周.

由于本文重点讨论换乘影响,为简化计算,忽略步行时间、等车时间以及换乘时间,在计算交通阻抗时,仅考虑公交车行驶时间及票价,即

$$t_{\mathrm{R}}=t_{\mathrm{a}}+t_{\mathrm{p}}=\sum_{(i,j)\in\mathbf{R}}t_{ij}+15n \tag{4}$$

式中,t_{ij} 为路段权重,即公交车行驶时间.

图 2 为图 1 的赋权图.

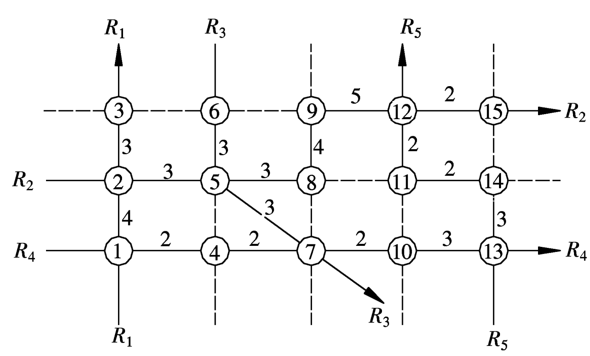

图 2　公交网络赋权图

用 Dijkstra 算法求解,可得从节点 1 ~ 15 的一条最短路径 R_{s}:1 → 4 → 7 → 10 → 13 → 14 → 11 → 12 → 15,如图 3 所示. 由式(4) 得线路交通阻抗值

$$t_{R_{\mathrm{s}}}=\sum_{(i,j)\in R_{\mathrm{s}}}t_{ij}+15n=18+15\times2=48(\mathrm{min})$$

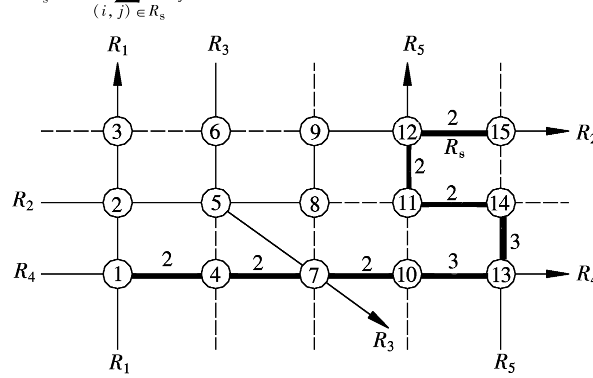

图 3　Dijkstra 算法最短路径方案图

用改进 Dijkstra 算法求解步骤如下:

① 初始标号,$P_1 = 0$;$T_i = \infty$,$i = 2,3,\cdots,15$.

② 第 1 轮标号,第 1 步:确定吸引线路集 W 和待修正的 T 标号点集 V,1 是刚得到 P 标号的点,与之相邻的 T 标号点是 2,4. $K(R_1,1) < K(R_1,2)$,$Q_{2,15} = 1 < 2$,$K(R_4,1) < K(R_4,4)$,$Q_{4,15} = 3 > 2$(其中,由于换乘代价较高,Q_0 取 2,即最多只允许一次换乘). 得 $W_1 = \{R_1\}$,$V_1 = \{2\}$. 第 2 步:修改 T 标号, $T_2 = 4$. 第 3 步:确定 P 标号, $P_2 = 4$.

③ 第 2 轮标号,第 1 步:确定吸引线路集 W 和待修正的 T 标号点集 V, 2 是刚得到 P 标号的点,与之相邻的 T 标号点是 1,3,4,5,6. $K(R_1,2) > K(R_1,1)$,$K(R_1,2) < K(R_1,3)$,$Q_{3,15} = \infty > 2$,$K(R_2,2) < K(R_2,5)$,$Q_{5,15} = 1 < 2$, 得 $W_2 = \{R_2\}$,$V_2 = \{5\}$. 第 2 步:修改 T 标号, $T_5 = 4 + 3 + 15 = 22$. 第 3 步:确定 P 标号, $P_5 = 22$.

④ 反复进行标号,直至终点 15 标上 P 标号, $P_{15} = 36$.

反向追踪的最佳路径 R_b:$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 15$,如图 4 所示. 由式(4)得线路交通阻抗值

$$t_{R_b} = \sum_{(i,j) \in R_b} t_{ij} + 15n = 21 + 15 = 36(\min) = P_{15}$$

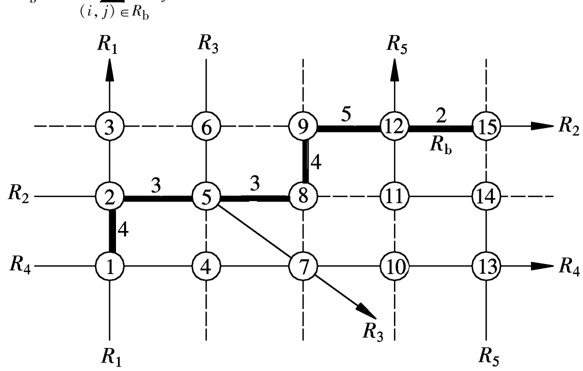

图 4　最佳路径方案图

由 2 种算法计算结果可得:$t_{R_b} < t_{R_s}$,即 R_b 优于 R_s,最短路径并不是最佳路径.

5　结　论

在公交网络中,对于乘客而言,换乘是一个非常敏感的因素. 路程值最短的路径不一定是最佳路径. 在路径选择时要综合考虑出行时间、费用和换乘等因素. 本文引入直达矩阵 $\boldsymbol{T}$ 矩阵和最小换乘矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵,得出节点间最小换乘次数来评价公交网络的方便可达性. 在用 Dijkstra 算法寻找最短路径时,利用 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵对待检验 T 标号点进行筛选,减少 T 标号计算量,得到一条综合考虑换乘和路径长度的最佳路径.

参考文献(References)

[1] de D Ortuzar J, Willumsen L G. *Modelling transport* [M]. England:John Wiley & Sons Ltd,1994. 309 - 317.

[2] 姚祖康. 道路与交通工程系统分析[M]. 北京:人民交通出版社,1995. 79 - 83.

[3] 王苏男,宋　伟,姜文生. 最短路径算法的比较[J]. 系统工程与电子技术, 1994, 16(5):43 - 49.
Wang Sunan, Song Wei, Jiang Wensheng. Comparison of the shortest path algorithms [J]. *Systems Engineering and Electronic Technology*, 1994, **16**(5): 43 - 49. (in Chinese)

[4] Liu C L, Pai T W, Chang C T, et al. Path-planning algorithms for public transportation systems [A]. In: *Proc of the 4th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems* [C]. Oakland, USA, 2001. 1061 - 1066.

[5] Liu C L. Best-path planning for public transportation systems [A]. In: *Proc of the 5th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems* [C]. Singapore, 2002. 834 - 839.